Geometría Algebraica I (18GAL01/MAT-610) Quiz 5 (Primavera 2025)

SOLUCIONES

Nombre:____ Nota:_____/10

Sea $\phi\colon A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sea

$$f = \operatorname{Spec}\phi\colon Y = \operatorname{Spec} B \to X = \operatorname{Spec} A$$

el correspondiente morfismo de esquemas.

1. (7 points) Explique cómo se define $f^{\#}$ en este caso.

Solution: Para definir el morfismo de haces $f^{\#}\colon \mathscr{O}_X \to f_*\mathscr{O}_Y$ basta hacerlo en la base de abiertos $\{D(g)\}_{f\in A}$. En tal caso, hay que definir un homomorfismo

$$f^{\#}(D(g))\colon \mathscr{O}_X(D(g)) = A_g \to (f_*\mathscr{O}_Y)(D(g)) = B_{\phi(g)}.$$

Lo definimos como el único homomorfismo ϕ_g que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_g \arrow[r, "\phi_g"] & B_{\phi(g)} \end{tikzcd}$$

sea conmutativo—usando la propiedad universal de la localización: note que el homomorfismo $A \to B_{\phi(g)}$ envía a g a una unidad.

2. (3 points) Describa $f_y^{\#}$ para $y \in Y$.

Solution: El homomorfismo $f_y^{\#}$ es un homomorfismo local $\mathscr{O}_{X,f(y)} \to \mathscr{O}_{Y,y}$. Si y corresponde a un ideal primo $\mathfrak{q}$ de B y $\mathfrak{p} = \phi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$ es su imagen, entonces $f_y^{\#}$ es un homomorfismo local $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$. Este es el único homomorfismo $\phi_{\mathfrak{q}}$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\phi_{\mathfrak{q}}"] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

sea conmutativo—usando la propiedad universal de la localización: note que el homomorfismo $A \to B_{\mathfrak{q}}$ envía el complemento de $\mathfrak{p}$ en unidades.