Geometría Algebraica I (18GAL01/MAT-610) Quiz 10 (Primavera 2025)
SOLUCIONES

Nombre:____ Nota:_____/10

1. (6 points) Sea X un esquema entero de tipo finito sobre un cuerpo k. Se sabe que su cuerpo de funciones es $K(X) = k(t, u, v)$ donde t, u, v son algebraicamente independientes sobre k.
   (a) (2 points) Determine la dimensión de X.

   Solution:
   $$\dim X = \operatorname{tr.deg}(K(X)/k) = 3$$

   (b) (2 points) Sea $x \in X$ un punto cerrado. Determine la dimensión del anillo $\mathscr{O}_{X,x}$.

   Solution:
   $$\dim \mathscr{O}_{X,x} = \dim X = 3$$

   (c) (2 points) Más aún, se sabe que $t \in \mathscr{O}_X(X)$. Determine la dimensión de $V(t)$.

   Solution:
   $$\dim V(t) = \dim X - 1 = 2$$
   lo cual usa que $t \in \mathscr{O}_X(X)$ no es nilpotente.

2. (4 points) Pruebe que $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ no es un dominio entero (en particular, no es un cuerpo). *Sugerencia:* $\mathbb{C} = \mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1\rangle$.

   Solution: Note que
   $$A := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[t]/\langle t^2 + 1\rangle = \mathbb{C}[t]/\langle t^2 + 1\rangle = \mathbb{C}[t]/\langle (t - i)(t + i)\rangle$$
   entonces $0 \neq t - i, t + i \in A$ son elementos no nulos cuyo producto es cero, o sea que son divisores de cero.