

I Examen Parcial Álgebra Conmutativa (Primavera 2026)

SOLUCIONES

Nombre: _____

Instrucciones: Lea cuidadosamente el examen antes de comenzar a resolverlo. Dispone de 80 minutos. Debe justificar completamente y rigurosamente todas sus respuestas para recibir crédito completo. Sea k un cuerpo/campo cualquiera.

1. (25 points) Sea A un anillo noetheriano. Muestre que todo endomorfismo (de anillo) sobreyectivo $\phi: A \rightarrow A$ es necesariamente un isomorfismo.

Solution: Defina $I_n = \ker \phi^n$, de tal forma que se tiene una sucesión creciente de ideales

$$I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots$$

Esta sucesión se estabiliza al ser A noetheriano. Digamos $I_m = I_{m+1} = \cdots$. Como ϕ es sobreyectivo, así lo es ϕ^n para todo n . Entonces, dado $x \in I_1 = \ker \phi$, podemos escribir $x = \phi^m(y)$ para algún $y \in A$. En particular,

$$0 = \phi(x) = \phi^{m+1}(y),$$

lo cual quiere decir que $y \in I_{m+1}$. Pero $I_m = I_{m+1}$, entonces $0 = \phi^m(y) = x$. Así $\ker \phi = 0$; como se quería.

2. (25 points) Sea A una k -álgebra de tipo finito (tcc álgebra afín). Muestre que $\text{Spec } A$ tiene a lo más $\dim_k A$ puntos cerrados.

Solution: Sean $\mathfrak{m}_1, \dots, \mathfrak{m}_n$ exactamente n ideales maximales en A (o sea, n puntos cerrados en $\text{Spec } A$). Note que dos ideales maximales distintos son primos relativos. Entonces, podemos usar el teorema chino del residuo para obtener un homomorphism sobreyectivo

$$A \rightarrow A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_n.$$

Entonces

$$\dim_k A \geq \dim_k(A/\mathfrak{m}_1 \times \cdots \times A/\mathfrak{m}_n) = \dim_k A/\mathfrak{m}_1 + \cdots + \dim_k A/\mathfrak{m}_n \geq n.$$

N.B. No se necesita que A sea de tipo finito.

3. (25 points) Sea $\theta: A \rightarrow B$ un homomorphism de k -álgebras donde B es de tipo finito. Muestre que $f = \text{Spec } \theta$ envía puntos cerrados en puntos cerrados.

Solution: Sea $\mathfrak{n}$ un punto cerrado en $\text{Spec } B$. Se tienen las siguientes extensiones

$$k \xrightarrow{\subseteq} A/f(\mathfrak{n}) \xrightarrow{\subseteq} B/\mathfrak{n}.$$

Por el teorema de ceros de Hilbert, $k \rightarrow B/\mathfrak{n}$ es una extensión algebraica de cuerpos. En particular, para $0 \neq x \in A$, tenemos una ecuación

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,$$

con $a_i \in k$. Esto se puede reescribir como

$$xy = -a_0$$

para algún $y \in A$. Como A es un dominio entero y $x \neq 0$, se sigue que $a_0 \neq 0$. Entonces, como k es un cuerpo, se puede dividir por a_0 y concluir que $-y/a_0$ es un inverso multiplicativo de x y así A es un cuerpo. Lo anterior quiere decir que $f(\mathfrak{n})$ es un punto cerrado.

4. (25 points) Sea $R = \bigoplus_{d \in \mathbb{N}} R_d$ un anillo $\mathbb{N}$ -graduado. Muestre que R es noetheriano si y solo si R_0 es noetheriano y R es una R_0 -álgebra de tipo finito.

Solution: Si R_0 es noetheriano y R es de tipo finito sobre R_0 , entonces el teorema de la base de Hilbert nos garantiza que R es noetheriano.

Para el recíproco, suponga que R es noetheriano y considere $R_+ = \bigoplus_{d \geq 1} R_d$ el ideal (homogéneo) irrelevante de R . Como $R_0 = R/R_+$, este es noetheriano pues es un cociente de R .

Por otro lado, R_+ es un ideal finitamente generado y así podemos tomar $r_1, \dots, r_n \in R_+$ un conjunto generador de elementos homogéneos. Se sigue que estos elementos generan a R como R_0 -álgebra. En efecto, se tiene que

$$R_d \subset R_0[r_1, \dots, r_n] \subset R$$

para todo $d \geq 0$. Esto se puede argumentar por inducción sobre d . El caso base es trivial. Suponga que $R_0, \dots, R_d \subset R_0[r_1, \dots, r_n]$. Sea $r \in R_{d+1}$. Podemos escribir

$$r = a_1r_1 + \cdots + a_nr_n$$

donde los elementos a_i son homogéneos de grado $d+1 - \deg r_i$. Por la hipótesis inductiva, $a_i \in R_0[r_1, \dots, r_n]$ y entonces $r \in R_0[r_1, \dots, r_n]$.